**Compresión y Reconocimiento de Imágenes usando Descomposición de Matrices**

**Introducción**  
Las imágenes digitales contienen miles de píxeles, lo que genera una alta dimensionalidad. Procesarlas directamente es costoso en tiempo y recursos, sobre todo cuando se trata de grandes volúmenes de datos visuales. ¿Cómo extraer información clave sin perder calidad ni eficiencia en el procesamiento?

El álgebra lineal ofrece herramientas como SVD y PCA que permiten:

* **Compresión eficiente** de imágenes, reduciendo dimensiones sin sacrificar contenido esencial.
* **Reconocimiento de patrones**, como rostros u objetos, facilitando tareas de clasificación automatizada.
* Aplicaciones en redes sociales, seguridad, medicina y más, donde el análisis visual es crítico para la toma de decisiones.

**Imágenes sugeridas:**

* Comparación visual entre imagen original y comprimida con PCA.
* Gráfico de varianza explicada (scree plot).  
  Puedes encontrar ejemplos en https://www.diegocalvo.es/pca-analisis-de-componentes-principales-para-compresion-de-imagenes/

**Explicación Sencilla de Términos Clave:**

* **PCA (Análisis de Componentes Principales):**  
  Técnica utilizada para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos conservando la mayor parte de su variabilidad. Si una imagen tiene miles de píxeles, PCA identifica las "direcciones" en el espacio que capturan la mayor información. Este enfoque se fundamenta en autovectores y autovalores, conceptos estudiados en álgebra lineal como soluciones de Av = \lambda v.
* **Eigenfaces:**  
  Rostros promedio generados mediante PCA sobre una base de datos facial. Representan patrones esenciales de variación entre las caras. Cualquier rostro nuevo puede aproximarse como una combinación lineal de estas eigenfaces, utilizando principios de espacio vectorial, proyección ortogonal y construcción de una base ortonormal.
* **SVD (Descomposición en Valores Singulares):**  
  Método numérico que descompone una matriz en tres componentes: U, Σ y Vᵀ. Es especialmente útil cuando hay más píxeles que imágenes y se desea identificar las estructuras subyacentes de los datos. Este tipo de descomposición se estudia en álgebra lineal como una extensión de la diagonalización y es crucial en aplicaciones reales como la compresión de imágenes.

**Visualización sugerida:**

* Gráfico de varianza explicada por cada componente principal.
* Muestra de eigenfaces en escala de grises, resaltando patrones faciales únicos.

**3. ¿Cómo Funciona la SVD?**

**Explicación Intuitiva:**

La descomposición en valores singulares (SVD) permite entender cualquier matriz de imágenes desde una perspectiva algebraica y práctica:

* **Componentes de la SVD:**
* **U**: Vectores singulares izquierdos — conocidos como eigenfaces.
* **Σ**: Valores singulares que indican la importancia relativa de cada componente.
* **Vᵀ**: Vectores singulares derechos — contienen las coordenadas de las imágenes en el nuevo espacio vectorial.

Esta estructura responde a la fórmula:  
**X = UΣVᵀ**,  
donde "X" representa el conjunto de imágenes como una única matriz a descomponer.

**Ejemplo ilustrativo:**  
Si contamos con 100 fotos de rostros (cada una con 10,000 píxeles), SVD permite representarlas eficazmente usando solo las 10 direcciones principales, lo que reduce el costo computacional y mejora la interpretabilidad. Este proceso aplica directamente conocimientos del curso como operaciones matriciales, bases ortonormales y reducción de dimensionalidad.

**Visualización sugerida:**

* Diagrama con la fórmula X = UΣVᵀ explicada gráficamente.
* Comparativa entre imágenes originales y reconstruidas usando pocos componentes.

**4. Metodología**

**Datos utilizados:**  
Se utilizó la base de datos Olivetti Faces (disponible en sklearn.datasets.fetch\_olivetti\_faces) con imágenes en escala de grises, lo que facilita su representación matricial. Estas imágenes permiten experimentar con algoritmos de reducción sin el ruido cromático.

**Simulación Numérica:**

* **Vectorización:** Cada imagen (64×64) se convierte en un vector de 4096 dimensiones, ideal para aplicar transformaciones lineales.
* **Centrado:** Se resta la imagen promedio para centrar los datos alrededor del origen y destacar las variaciones individuales.
* **SVD/PCA:** Se calculan autovectores (eigenfaces) y autovalores para encontrar las direcciones de mayor variabilidad en el conjunto.
* **Reconstrucción:** Se aproximan las imágenes originales usando solo las componentes principales que explican >95% de la varianza, con resultados sorprendentemente precisos.

**5. Trabajo Futuro**

**Posibles Extensiones:**

* **Reconocimiento en tiempo real:** Combinando PCA con algoritmos como SVM para clasificar imágenes rápidamente.
* **Imágenes a color:** Aplicar SVD a tensores (descomposición Tucker) permitiría incluir información RGB en el análisis.
* **Aplicaciones móviles:** Apps de seguridad que integren reconocimiento facial eficiente podrían beneficiarse de estos modelos ligeros.
* **Deep Learning:** Comparar PCA con autoencoders abre camino al uso de redes neuronales para representar datos de manera aún más abstracta. Estas ideas representan la convergencia entre teoría matemática y soluciones tecnológicas emergentes.

**6. Referencias + Código**

**Referencias Bibliográficas:**

* Strang, G. (2009). *Introduction to Linear Algebra*.
* Turk, M., & Pentland, A. (1991). *Eigenfaces for Recognition*.
* Shlens, J. (2014). *A Tutorial on Principal Component Analysis*.